

UTILIZAÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA PARA ANÁLISE LOCAL DOS PONTOS CRÍTICOS DAS EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA

SILVA, Francine Esquerdo da.

MENEGHETTI, André
franzinha_esquerdo@hotmail.com
Universidade Federal do Rio Grande

Palavras-chave: Matriz Jacobiana; Lotka-Volterra; Sistemas; EDO's; Auto-funções.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos uma aplicação para a matriz Jacobiana, que é a matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. O sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra é utilizado para modelar um sistema predador-presa simplificado. Para desenvolver a aplicação, os pontos de equilíbrio do sistema são encontrados e a matriz Jacobiana é utilizada para entender as soluções próximas a estes pontos.

2 METODOLOGIA

Iniciamos com a construção do modelo Preador-Presa e, portanto, vamos definir as variáveis do modelo. Sejam t a variável independente que representa o tempo, x a variável dependente do tempo t que representa a população de presas e y a variável dependente do tempo t que representa a população de predadores. Neste modelo simplificado, consideramos que os predadores da população y se alimentam, exclusivamente, das presas da população x , enquanto que as presas se alimentam da natureza. Além disso, fazemos as seguintes hipóteses:

- Se não houver predadores, a população de presas deve aumentar ao longo do tempo, a uma taxa proporcional a população atual. Matematicamente, descrevemos por: $dx/dt = ax$, no qual $a \in \mathbb{R}^+$, quando $y = 0$;
- Se não houver presas, os predadores deveriam ser extintos ao longo do tempo. Matematicamente, descrevemos por: $dy/dt = -cy$, para $c \in \mathbb{R}^+$, quando $x = 0$;
- O número de encontros entre predadores e presas deve ser proporcional ao produto das duas populações. Cada encontro tende a promover o crescimento da população de predadores e diminuir o crescimento da população de presas, que é descrito, respectivamente por γxy e $-\alpha xy$, para $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}^+$.

O modelo matemático é descrito por um sistema de equações diferenciais (SED) ordinárias não lineares, Equação 1, que são chamadas de equações de Lotka-Volterra, (BOYCE; DIPRIMA, 1999).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = x(-c + \gamma x) \end{cases} \quad (1)$$

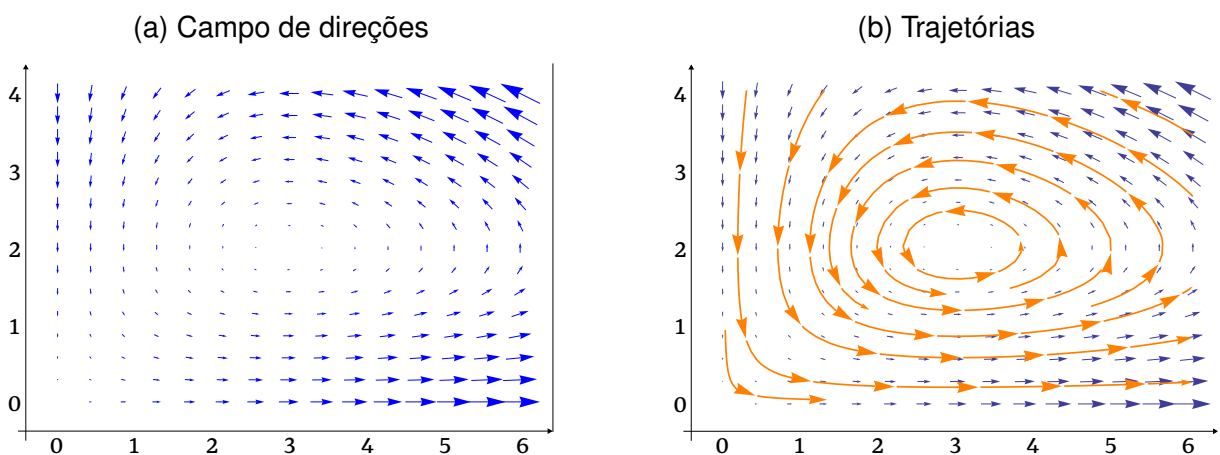
Vamos considerar o caso particular $a = 1$, $\alpha = 0,5$, $c = 0,75$ e $\gamma = 0,25$. Assim, temos um caso particular das equações de Lotka-Volterra, que está descrito pela Equação 2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 0,5xy = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -0,75y + 0,25xy = G(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Este SED é não linear e não pode ser resolvido analiticamente. Nossa proposta é encontrar os pontos críticos do sistema e estudar as soluções próximas à esses pontos.

Iniciamos observando que o SED é um sistema classificado como autônomo, ou seja, a variável independente t não aparece explicitamente. Quando um sistema possui essa característica, é possível determinar o campo de direções do sistema, que é apresentado pela Figura 1a, no qual o eixo horizontal representa a população de presas (x) e o eixo vertical a população de predadores (y).

Figura 1: Campo de direções e trajetórias



Fonte: Os autores.

Por inspeção, na Figura 1a percebemos que campo de direções apresenta dois possíveis pontos críticos, que são o ponto $(0, 0)$ e o ponto $(3, 2)$. Para comprovar a nossa hipótese, efetuamos os cálculos. Os pontos críticos, quando existem, ocorrem ao anular as derivadas (variações nulas). Os cálculos são apresentados pela Equação 3.

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 0,5xy = 0 \\ -0,75y + 0,25xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou } (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou } (x, y) = (3, 2) \end{cases}. \quad (3)$$

Quando é conhecido no número de predadores (y) e de presas (x) em um certo instante de tempo, que podemos atribuir a $t = 0$, essa informação se reflete em um par ordenado sobre o domínio representado pela Figura 1a. Com o passar do tempo (t aumentando) esse par ordenado irá se mover conforme os vetores de direção estão indicando e o local por onde ele passará é chamado de trajetória. Entretanto, apenas com o campo de direções, não fica claro que se a trajetória será uma curva fechada ou em forma de espiral. Se for espiral, pode convergir para dentro, em direção ao ponto crítico, ou se afastar. O sistema predador-presa em equilíbrio gera curvas fechadas.

Agora, nosso objetivo é caracterizar o comportamento das soluções do SED próximo aos pontos críticos, observando suas trajetórias. Para estudar o comportamento próximo a cada um dos pontos críticos, vamos utilizar uma aproximação linear local, que pode ser obtida utilizando a matriz Jacobiana. A partir da Equação 2 podemos verificar que a matriz Jacobiana J , aplicada no ponto (x, y) , da transformada $(x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$ é a Equação 4.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0,5y & -0,5x \\ 0,25y & -0,75 + 0,25x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Utilizando a matriz Jacobiana, o campo de vetores, representado na Figura 1a, pode ser aproximado em um ponto (x^*, y^*) por

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J(x^*, y^*) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (5)$$

para $u = (x - x^*)$ e $v = (y - y^*)$. Analisando a região próxima a origem, $(x^*, y^*) = (0, 0)$ obtemos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{bmatrix}}_{J(0,0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (6)$$

A matriz Jacobiana $J(0, 0)$ possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -0,75$ e definem, respectivamente, as autofunções $\vec{\xi}_1 = [1 \ 0]^T$ e $\vec{\xi}_2 = [0 \ 1]^T$. A solução geral da Equação 6 é $[x \ y]^T = C_1 \vec{\xi}_1 e^t + C_2 \vec{\xi}_2 e^{-0,75t}$. Da literatura, sabemos que esse tipo de solução é instável, ou seja, ao “largar um ponto” próximo à origem, com o passar do tempo, esse ponto tende a se afastar, (ANTON; 3, 2012). Lembramos que essa solução representa as trajetórias próximas à origem $(0, 0)$, veja Figura 1b. Faremos um estudo similar no

ponto crítico $(3, 2)$. Considerar $(x^*, y^*) = (3, 2)$ na Equação 5. Obtemos a Equação 7.

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}}_{J(3,2)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Fazendo o estudo dos autovalores da matriz $J(3, 2)$, obtemos como resposta os autovalores complexos $\lambda_1 = \sqrt{3}i/2$ e $\lambda_2 = -\sqrt{3}i/2$. As respectivas autofunções são $\vec{\xi}_1 = [1 \ -i/\sqrt{3}]^T$ e $\vec{\xi}_2 = [1 \ i/\sqrt{3}]^T$. Os autovalores são complexos puros, isto é, não possuem a parte real. A solução geral da Equação 7 é dada pela Equação 8.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Da literatura, sabemos este tipo de solução é estável (curvas fechadas), (ANTON; 3, 2012), ver Figura 1b. Então, próximo ao ponto crítico $(3, 2)$ existe uma região de estabilidade.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Podemos verificar que foi possível estudar localmente os pontos críticos do sistema utilizando a matriz Jacobiana. Foi feito, de fato, uma aproximação local. A Figura 1b mostra as trajetórias do SED estudado, incluindo as trajetórias locais próximos aos pontos críticos estudados. As equações de Lotka-Volterra são bem conhecidas e totalmente resolvidas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho tem como objetivo melhorar o entendimento sobre a matriz Jacobiana, assim como despertar o interesse em aplicá-la em problemas mais sofisticados. Além disso, apresentar uma aplicação de equações diferenciais ordinárias, que é estudado nas disciplinas de Cálculo dos cursos de exatas e, em particular, as engenharias.

5 REFERÊNCIAS

ANTON, H.; 3. **Álgebra Linear Com Aplicações**. [S.l.]: BOOKMAN - GRUPO A, 2012. ISBN 9788540701694.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1999.